Universidade Federal Fluminense
Curso: Sistemas de Informação
Disciplina: Fundamentos Matemáticos para Computação
Professora: Raquel Bravo

Gabarito da lista de Exercícios sobre Conjuntos

1. Determine quais dos seguintes conjuntos são iguais:

   $A = \{a, b, -1\}$ $\quad B = \{b, a, -1\}$ $\quad C = \{b, a, b, -1\}$ $\quad D = \{a, -1\}$

   ***R*esposta:** $A = B = C$. Todos os elementos dos conjuntos A, B e C são iguais, as repetições não são consideradas como elementos diferentes.

2. Escreva os seguintes conjuntos explicitando seus elementos:

   (i) $A = \{x \in \mathbb{Z} | -1 \leq x \leq 4\}$

   ***R*esposta:** $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

   (ii) $B = \{x \in \mathbb{N} | x \leq \sqrt{10} \text{ ou } x > -2\}$

   ***R*esposta:** Como queremos números naturais, devemos obter os números naturais que que são maiores que -2 e uni-los ao conjunto de números menores ou iguais a $\sqrt{10}$. Assim, os números naturais maiores que -2 são $\{1, 2, 3 \cdots\}$ e os números naturais menores os iguais a $\sqrt{10}$ são $\{1, 2, 3\}$. Note que $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3 \cdots\}$ e, portanto, a união desses dois conjuntos é o próprio conjunto $\{1, 2, 3 \cdots\}$. Logo, $B = \{1, 2, 3 \cdots\}$.

(iii) $C = \{x \in \mathbb{R} | 2x + 1 = 5\}$

Resposta: Temos que $2x+1 = 5$ é equivalente a dizer que $x = 2 \in \mathbb{R}$. Portanto, $C = \{2\}$.

(iv) $D = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 1 = 0\}$

Resposta: Temos que $x^2 + 1 = 0$ é equivalente a dizer que $x^2 = -1$, que não tem solução no conjunto dos reais. Portanto, $D = \emptyset$.

(EXTRA) $J = \{x \in \mathbb{R} | 3x + 1 = 5\}$

Resposta: Temos que $3x+1 = 5$ é equivalente a dizer que $x = \frac{4}{3} \in \mathbb{R}$. Portanto, $C = \{\frac{4}{3}\}$.

(EXTRA) $K = \{x \in \mathbb{N} | 3x + 1 = 5\}$

Resposta: $K = \emptyset$, pois a solução de $3x + 1 = 5$ é $x = \frac{4}{3} \notin \mathbb{N}$.

3. Determine quais das seguintes relações de pertinência são verdadeiras:

(i) $\sqrt{2} \in \{x \in \mathbb{R} | x \geq 2\}$

Resposta: FALSA, pois $\sqrt{2} = 1,4\ldots$, isto é, $1 < \sqrt{2} < 2$, e o conjunto $B = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 2\}$ é formado pelos números maiores ou iguais que 2. Logo, $\sqrt{2}$ não é um elemento de B.

(ii) $3 \in \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 4\}$, onde $|a| = a$ se $a \geq 0$ ou $|a| = -a$ se $a < 0$

Resposta: VERDADEIRA, pois $x = 3 \in \mathbb{R}$ e $|3| = 3 < 4$. Observamos que $|x| \leq 4$ equivale a $-4 \leq x \leq 4$.

(iii) $\emptyset \notin P(A)$, onde $A = \{1, 2\}$

***R*esposta:** FALSA, pois $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ e $\emptyset$ é um elemento do conjunto $P(A)$, logo $\emptyset \in P(A)$.

(iv) $\{1\} \in \{x \in \mathbb{R} | x^2 = 1\}$

***R*esposta:** FALSA, pois $\{1\}$ não é um elemento do conjunto $\{x \in \mathbb{R} | x^2 = 1\}$, já que este conjunto é formado apenas pelos elementos 1 e -1, temos $1 \in \{x \in \mathbb{R} | x^2 = 1\}$ e $\{1\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} | x^2 = 1\}$.

(v) $\emptyset \in \{\emptyset, \{1\}\}$

***R*esposta:** VERDADEIRA, pois o elemento $\emptyset$ pertence ao conjunto $\{\emptyset, \{1\}\}$.

4. Determine quais das seguintes relações de inclusão são verdadeiras:

(i) $\{-2, 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\}$

***R*esposta:** VERDADEIRA, pois temos que $|x| \leq 2$, significa que $-2 \leq x \leq 2$. Logo, $\{x \in \mathbb{Z} | |x| \leq 2\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Portanto, os elementos do primeiro conjunto, -2 e 0, são também elementos do segundo conjunto.

(ii) $\{\pi\} \subset \{1, \{\pi\}, a\}$

***R*esposta:** FALSA. De fato, π não é um elemento de $\{1, \{\pi\}, a\}$. Portanto, a definição de inclusão estrita não é verificada.

(iii) $\{\{\pi\}\} \subset \{1, \{\pi\}, a\}$

***R*esposta:** VERDADEIRA.

(iv) $\emptyset \nsubseteq \{3, 1, -7\}$

***R*esposta:** FALSA, pois $\emptyset \subseteq C$, para todo conjunto C.

(v) $\emptyset \subseteq \{\emptyset, \{1\}\}$

***R*esposta:** VERDADEIRA.

5. Dado o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 1\} = \{-1, 0, 1\}$, determine o conjunto $P(A)$.

   ***R*esposta:** O conjunto das partes de A está formado por todos os subconjuntos de A, logo $P(A) = \{\emptyset, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1, 0\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}, \{-1, 0, 1\}\}$.

6. Sejam $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $A = \{0, 4\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$, $C = \{1, 4\}$, $D = \{0, 1\}$. Determine os seguintes conjuntos:

   (a) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

   (b) $B \cap C = \{1\}$

   (c) $A \cap \overline{B} = \{4\}$

   (d) $A \cup (B \cap C)$

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{0, 4\} \cup \{1\} \\ &= \{0, 1, 4\}. \end{aligned}$$

   (e) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A \cup C) &= \{0, 1, 2, 3, 4\} \cap \{0, 1, 4\} \\ &= \{0, 1, 4\} \end{aligned}$$

(f) $(\overline{A \cap B}) \cup (\overline{A \cap C})$

$$\begin{aligned}
(\overline{A \cap B}) \cup (\overline{A \cap C}) &= (U - (A \cap B)) \cup (U - (A \cap C)) \\
&= (\{0,1,2,3,4\} - \{0\}) \cup (\{0,1,2,3,4\} - \{4\}) \\
&= \{1,2,3,4\} \cup \{0,1,2,3\} \\
&= \{0,1,2,3,4\}
\end{aligned}$$

(g) $A \cup \overline{B} = \{0,4\}$

(h) $A - B = \{4\}$

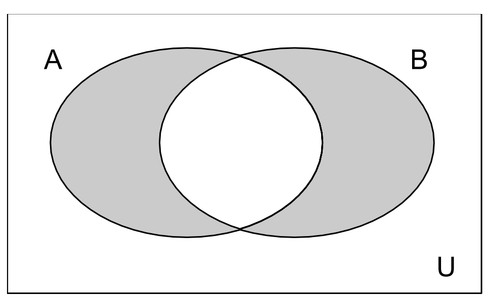
(i) $B - \overline{A} = \{0\}$

(j) $A \cup (B \cap C \cap D)$

$$\begin{aligned}
A \cup (B \cap C \cap D) &= \{0,4\} \cup \{1\} \\
&= \{0,1,4\}
\end{aligned}$$

7. Represente por meio de um diagrama de Venn a diferença simétrica entre dois conjuntos, $A \Delta B$, definida por $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

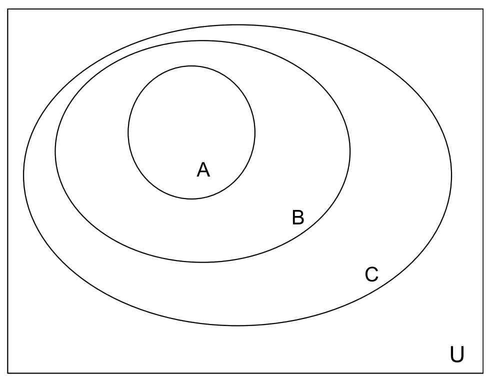
***R*esposta:**



8. Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U. Represente por meio de diagramas de Venn as seguintes situações:

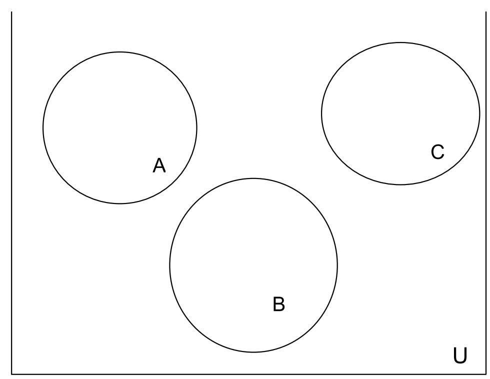
(i) $A \subset B \subset C$

***R*esposta:**



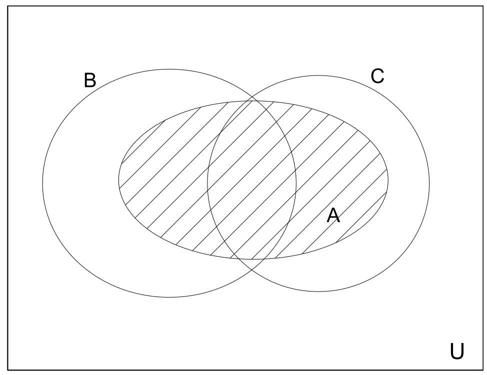
(ii) $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$

***R*esposta:**



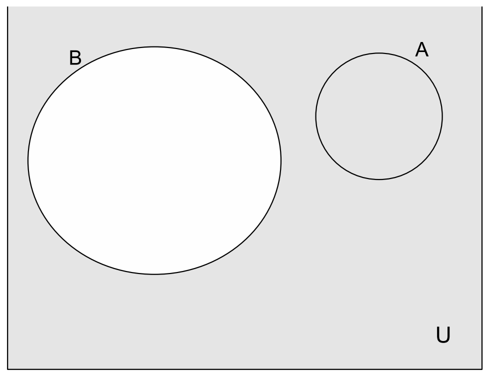
(iii) $A \subseteq B \cup C$

***R*esposta:**



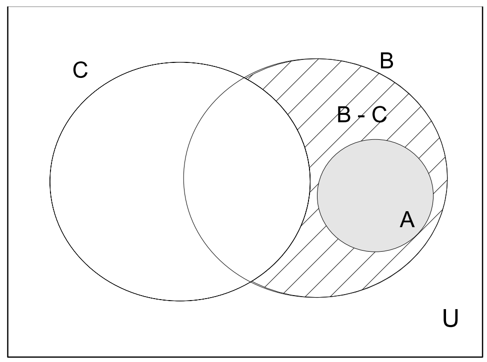
$(iv)\ A \subseteq \overline{B}$

***R*esposta:**



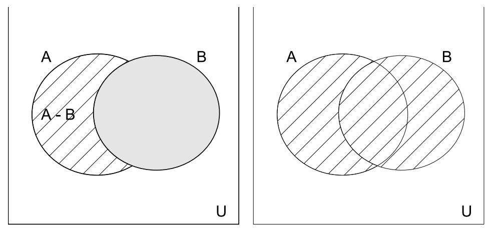
(v) $A \subseteq B - C$

***R*esposta:**



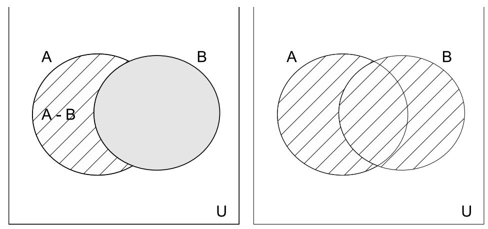
9. Verifique, usando os diagramas de Venn as seguintes igualdades:
   (i) $(A - B) \cup B = A \cup B$

   ***R*esposta:**



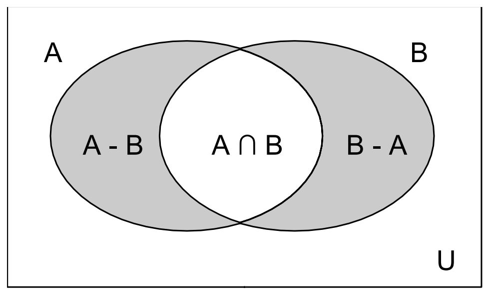
(ii) $(A - B) \cap B = \emptyset$

***R*esposta:**



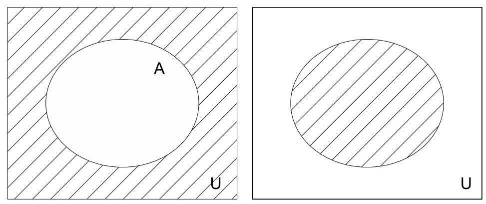
(iii) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

***R*esposta:**



(v) $(\overline{\overline{A}}) = A$

***R*esposta:**



$\overline{A}$ $\qquad\qquad$ $\overline{\overline{A}}$

10. Mostre que $A \subseteq B$ e $A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cap C$.

    ***R*esposta:** Seja $x \in A$. Como$A \subseteq B$ e $A \subseteq C$, então $x \in B$ e $x \in C$. Logo, $x \in B \cap C$ e conseqüentemente $A \subseteq B \cap C$.

11. Mostre que $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$

    ***R*esposta:** Primeiro provaremos que $A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset$.

    Seja $x \in A$. Como $A \subseteq B$, então $x \in B$. Se $x \in A - B$, então $x \in A$ e $x \notin B$. No entanto, todo elemento de A é também elemento de B, logo $A - B = \emptyset$.

    Provaremos agora que $A - B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$.

    Como $A - B = \emptyset$, não existe x tal que $x \in A$ e $x \notin B$. Logo, todo elemento de A é elemento de B e conseqüentemente $A \subseteq B$.

12. Mostre que $A - B \subseteq A$

    ***R*esposta:** $A - B = \{x | x \in A \text{ e } x \notin B\}$. Portanto, se $x \in A - B$, então $x \in A$.

13. Mostre que $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

    Resposta: $(\Rightarrow)$ Como $A \subseteq B$, se $x \in A$ então $x \in B$. Logo, se $x \notin B$, então $x \notin A$.

    $(\Leftarrow)$ $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ significa que se $x \in \overline{B}$, então $x \in \overline{A}$. Equivalentemente, se $x \notin B$, então $x \notin A$. Logo, não existe $x \in A$ tal que $x \notin B$. Portanto $A \subseteq B$.

14. Dados os conjuntos $C = \{x \in \mathbb{N} | x$ é múltiplo de $2\}$, $D = \{x \in \mathbb{N} | x$ é múltiplo de $3\}$, $E = \{x \in \mathbb{N} | x$ é múltiplo de 6 $\}$, verifique que $C \cap D = E$.

    Resposta: Decompondo 6 em fatores primos obtemos que $6 = 2.3$, portanto se um número n é múltiplo de 6, então n é múltiplo de 2 e 3, isto significa que $E \subseteq C \cap D$. Analogamente, se n é múltiplo de 2 e 3 então n é múltiplo de 6, isto é $D \cap C \subseteq E$. Concluímos portanto que $C \cap D = E$.

15. Considere $A = \{x \in \mathbb{N} | 5 \leq x^2 \leq 300\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq 3x - 2 \leq 30\}$. Calcule:

    Resposta: A e B representam os conjuntos: $A = \{3, 4, 5, ..., 17\}$ e $B = \{1, 2, 3, ..., 10\}$.

    (i) $A \cup B = \{1, 2, 3, ..., 16, 17\}$

    (ii) $A \cap B = \{3, 4, ..., 10\}$

    (iii) $A - B = \{11, 12, ..., 17\}$

    (iv) $B - A = \{1, 2\}$

    (v) $\overline{A} \cap \overline{B} = \{x \in \mathbb{N} | x \geq 18\}$

    (vi) $\overline{A} \cup \overline{B} = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 2$ ou $x \geq 18\}$

16. Dado $C = \{2, -1, 5\}$, considere o conjunto universo sendo o conjunto de partes de C, $U = P(C)$. Calcule:

    (i) $\overline{A}$ $\qquad$ (ii) $A \cap B$

para $A = \{\{2, -1\}, \{2\}\}$, $B = \{\{5\}, \{2, -1, 5\}, \{-1, 2\}\}$.

***R*esposta:** $U = P(C) = \{\emptyset, \{2\}, \{-1\}, \{5\}, \{2, -1\}, \{2, 5\}, \{-1, 5\}, \{2, -1, 5\}\}$.

(i) $\overline{A} = \{\emptyset, \{-1\}, \{5\}, \{2, 5\}, \{-1, 5\}, \{2, -1, 5\}\}$.

(ii) $A \cap B = \{\{2, \text{-}1\}\}$.

17. Use a propriedade distributiva da interseção em relação a união de conjuntos para provar que $(A \cap D) \cup \overline{D} = A \cup \overline{D}$

***R*esposta:**

$$\begin{array}{lcl}
(A \cap D) \cup \overline{D} & = & \\
\text{(propriedade distributiva)} & = & (A \cup \overline{D}) \cap (D \cup \overline{D}) \\
 & = & A \cup \overline{D}
\end{array}$$

18. Prove que $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.

***R*esposta:**

$$\begin{array}{lcl}
A - (B - C) & = & \\
\text{(prop. da diferença)} & = & A \cap \overline{(B \cap \overline{C})} \\
\text{(Lei de Morgan)} & = & A \cap (\overline{B} \cup \overline{\overline{C}}) \\
 & = & A \cap (\overline{B} \cup C) \\
\text{(prop. distributiva)} & = & (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C) \\
\text{(prop. da diferença)} & = & (A - B) \cup (A \cap C)
\end{array}$$

19. Mostre as seguintes igualdades:

(i) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

***R*esposta:** Seja U o universo onde estão os conjuntos A e B:

$$\begin{array}{lcl}
(A - B) \cup (B - A) & = & \\
\text{(prop. da diferença)} & = & (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \\
\text{(prop. distributiva)} & = & (A \cup (B \cap \overline{A})) \cap (\overline{B} \cup (B \cap \overline{A})) \\
\text{(prop. distributiva)} & = & (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \\
\text{(Lei de Morgan)} & = & (A \cup B) \cap U \cap U \cap \overline{(A \cap B)} \\
 & = & (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} \\
\text{(prop. da diferença)} & = & (A \cup B) - (A \cap B)
\end{array}$$

(ii) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

***R*esposta:**

$$
\begin{array}{lcl}
(A \cap B) - (A \cap C) & = & \\
\text{(prop. da diferença)} & = & (A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} \\
\text{(Lei de Morgan)} & = & (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \\
\text{(prop. distributiva)} & = & ((A \cap B) \cap \overline{A}) \cup ((A \cap B) \cap \overline{C}) \\
\text{(prop. comutativa e associativa)} & = & ((A \cap \overline{A}) \cap B) \cup (A \cap (B \cap \overline{C})) \\
\text{(prop. da diferença)} & = & (\emptyset \cap B) \cup (A \cap (B - C)) \\
 & = & A \cap (B - C)
\end{array}
$$

20. Dados os seguintes conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{Z} | 0 \leq x \leq 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | 0 \leq x \leq 7\}$ Verifique que:

(i) $A = B$

***R*esposta:** $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

(ii) $\overline{A} \neq \overline{B}$

***R*esposta:** $\overline{A} = \{..., -3, -2, -1, 8, 9, ...\}$ e $\overline{B} = \{8, 9, 10, ...\}$.